Порядковое интегрирование и теорема типа Рисса-Маркова о представлении положительных операторов

Курс лекций

Тасоев Б.Б.
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН.

Владикавказ 2023

Лекция №1. Интеграл Лебега.

В данной лекции предлагается конструкция интеграла Лебега, основанная на теории векторных решёток. Мы будем следовать схеме построения интеграла Лебега, предложенной в монографии [2].

Упорядоченным векторным пространством над полем $\mathbb{R}$ называют пару $E := (E, \leqslant)$, где E — векторное пространство, $\leqslant$ — отношение порядка, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) если $x \geqslant y$, то $x + z \geqslant y + z$ для всех $x, y, z \in E$;

(2) если $x \geqslant y$, то $\alpha x \geqslant \alpha y$ для всех $0 \leqslant \alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$.

Векторной решёткой называют упорядоченное векторное пространство E, в котором для любых элементов $x, y \in E$ существуют $x \vee y := \sup\{x, y\}$ и $x \wedge y := \inf\{x, y\}$.

Пусть E — векторная решётка и $x \in E$. Тогда в E существуют следующие элементы: $|x| := x \vee (-x)$, $\quad x^+ := x \vee 0$, $\quad x^- := (-x)^+ = -(x \wedge 0)$.

Примеры векторных решеток:

(a) $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел. Для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha \vee \beta = \max\{\alpha, \beta\}$, $\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha, \beta\}$, $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$, $\alpha^- = -\min\{\alpha, 0\}$.

(b) $\mathbb{R}^\Omega$ — множество всех функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \neq 0)$. Для $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$

$$f \leqslant g \Leftrightarrow f(\omega) \leqslant g(\omega), \quad (\omega \in \Omega)$$

$$f \vee g(\omega) := f(\omega) \vee g(\omega), \quad f \wedge g(\omega) := f(\omega) \wedge g(\omega).$$

В частности, $|f|(\omega) = |f(\omega)|$, $\quad f^+(\omega) = f(\omega)^+$, $\quad f^-(\omega) = f(\omega)^-$.

Порядковым идеалом в векторной решётке E называется векторное подпространство E_0 в E такое, что если $x \in E$ и $z \in E_0$ удовлетворяют неравенству $|x| \leqslant |z|$, то $x \in E_0$. Всякий порядковый идеал является векторной подрешёткой.

Примеры. $l_0 = \mathbb{R}^\mathbb{N}$, l_p, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. l_p порядковый идеал в l_0.

Подробное изложение теории векторных решёток и операторов в них можно найти в монографиях [1, 3, 4].

Пусть Ω – некоторое непустое множество. Символом 2^Ω будем обозначать систему всех подмножеств множества Ω.

Определение 1.1. Пусть Ω – некоторое непустое множество. Система множеств $\Sigma \subset 2^\Omega$ называется *σ-алгеброй*, если выполняются следующие условия:

(1) $\emptyset \in \Sigma$;

(2) $A^c \in \Sigma$ для любого $A \in \Sigma$;

(3) $\bigcup_n A_n \in \Sigma$ для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \Sigma$.

Легко показать, что всякая σ-алгебра содержит Ω и для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ выполняется $\bigcap_n A_n \in \Sigma$.

Примеры σ-алгебр.

(a) $\Sigma := \{\emptyset, \Omega\}$;

(b) $\Sigma := 2^\Omega$;

(c) Пусть X — топологическое пространство. Так как пересечение σ-алгебр является σ-алгеброй и 2^X содержит любую σ-алгебру подмножеств X, то существует *Борелевская σ-алгебра* $\mathcal{B}(X)$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества X. Всякий элемент $B \in \mathcal{B}(X)$ называются *борелевским множеством.*

Определение 1.2. Пусть Ω – непустое множество, Σ – σ-алгебра подмножеств Ω. Функция $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ называется *мерой*, если выполняются следующие условия:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \Sigma$, удовлетворяющей условию $A_i \cap A_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, справедливо равенство

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

Отметим, что мера μ обладает следующими свойствами:

(i) Если $A \subset B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ (монотонность);

(ii) Если $A_n \subset A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$ (непрерывность).

Пару (Ω, Σ), где Σ — σ-алгебра подмножеств Ω, называют *измеримым пространством*, а элементы из Σ — *измеримыми множествами.*

Всюду далее (Ω, Σ, μ) — фиксированное измеримое пространство с мерой μ, $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борелевская σ-алгебра, т.е. наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества в $\mathbb{R}$.

Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется Σ-*измеримой*, если $f^{-1}(B) \in \Sigma$ для любого множества $B \in \mathcal{B}$. Множество всех измеримых функций будем обозначать символом $\mathcal{L}^0(\mu)$.

Пространство $\mathcal{L}^0(\mu)$ является векторной подрешёткой $\mathbb{R}^\Omega$. Отношение порядка и решёточные операции в $\mathcal{L}^0(\mu)$ вычисляются поточечно. Таким образом, для $f, g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ существуют $f \vee g, f \wedge g, |f|, f^+, f^- \in \mathcal{L}^0(\mu)$, вычисляемые по формулам

$$f \leqslant g \Leftrightarrow f(\omega) \leqslant g(\omega), \quad (\omega \in \Omega)$$

$$f \vee g(\omega) := f(\omega) \vee g(\omega), \quad f \wedge g(\omega) := f(\omega) \wedge g(\omega),$$

$$|f|(\omega) = |f(\omega)|, \quad f^+(\omega) = f(\omega)^+, \quad f^-(\omega) = f(\omega)^-.$$

Для произвольного $A \in \Sigma$ символом χ_A будем обозначать характеристическую функцию множества A, определяемую правилом

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A \\ 0, & \text{если } \omega \in A^c \end{cases} \quad (\omega \in \Omega).$$

Ясно, что $\chi_\emptyset = 0$, то есть $\chi_\emptyset(\omega) = 0(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Определение 1.3. Функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется Σ-*ступенчатой*, если она представима в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ попарно не пересекаются и $\mu(A_i) < \infty$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

Если же $\mu(A_i) = \infty$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$, то функция φ называется Σ-*простой.* Ясно, что всякая Σ-простая функция $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ измерима.

Говоря, что некоторое свойство P выполняется *μ-почти всюду* (μ-п.в.), если мера множества, на котором свойство P не выполняется, равна нулю.

Лемма 1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Для произвольной функции $0 \leqslant f \in \mathcal{L}^0(\mu)$ существует последовательность Σ-простых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $0 \leqslant f_n \uparrow f$;*

(2) *Для произвольной функции $0 \leqslant f \in \mathcal{L}^0(\mu)$, $f \geqslant 0$ μ-п.в существует последовательность Σ-простых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $0 \leqslant f_n \uparrow f$ μ-п.в.*

$\lhd$ (1). Пусть $0 \leqslant f \in \mathcal{L}^0(\mu)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим по определению $A_n^i := \{\omega \in \Omega : (i-1)2^n \leqslant f(\omega) \leqslant i2^{-n}\}$ для всех $i = 1, \ldots, n2^n$. Тогда множества A_n^i измеримы и $A_n^i \cap A_n^j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Положим по определению

$$f_n := \sum_{i=1}^{n2^n} (i-1)2^{-n} \chi_{A_n^i}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ состоит из Σ-простых функций и удовлетворяет условиям $0 \leqslant f_n(\omega) \leqslant f_{n+1}(\omega) \leqslant f(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}$. Более того, если зафиксировать произвольный $\omega \in \Omega$, то $0 \leqslant f(\omega) - f_n(\omega) \leqslant 2^{-n}$ для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $0 \leqslant f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

(2). Пусть теперь $f \geqslant 0$ μ-п.в. и $E := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geqslant 0\}$. Функция $\chi_E f$ всюду больше нуля и в силу (1) найдется последовательность Σ-простых функций такая, что $0 \leqslant f_n(\omega) \uparrow \chi_E(\omega) f(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Следовательно, $0 \leqslant f_n \uparrow f$ μ-п.в., так как $\mu(E^c) = 0$. $\rhd$

Обозначим символом $\mathrm{St}(\Sigma)$ множество всех Σ-ступенчатых функций. Положим по определению

$$I_\mu(\varphi) := \int \varphi \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \tag{1}$$

для всех $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathrm{St}(\Sigma)$.

Лемма 1.2. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Множество $\mathrm{St}(\Sigma)$ является векторной подрешеткой $\mathcal{L}^0(\mu)$;*

(2) *Отображение* $I_\mu : \mathrm{St}(\Sigma) \to \mathbb{R}$ *из формулы* (1) *корректно определено (т.е.* $I_\mu(\varphi)$ *не зависит от представления* $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathrm{St}(\Sigma)$*) и является линейным функционалом.*

$\triangleleft$ (1). Пусть $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, $\psi = \sum_{i=1}^m \beta_k \chi_{B_k} \in \mathrm{St}(\Sigma)$ и $c \in \mathbb{R}$. Ясно, что $c\varphi \in \mathrm{St}(\Sigma)$. Отметим, что $\varphi + \psi$ принимает не более чем $n + m$ ненулевых значений. Предположим, что $\varphi+\psi$ принимает ненулевые значения $a_1, \ldots, a_p$, где $p \leqslant m+n$. Тогда $C_i := (\varphi + \psi)^{-1}(a_i) \in \Sigma$ попарно не пересекаются и $\mu(C_i) \leqslant \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{k=1}^m B_k) < \infty$ для всех $i = 1, \ldots, p$. Таким образом, $\varphi + \psi = \sum_{i=1}^p a_i \chi_{C_i} \in \mathrm{St}(\Sigma)$ и $\mathrm{St}(\Sigma)$ — векторное пространство. Более того, $|\varphi| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \chi_{A_i} \in \mathrm{St}(\Sigma)$. Таким образом, $\mathrm{St}(\Sigma)$ вместе с каждой функцией содержит модуль этой функции. Следовательно, $\mathrm{St}(\Sigma)$ является векторной подрешеткой $\mathcal{L}^0(\mu)$.

(2) Пусть $f \in \mathrm{St}(\Sigma)$ имеет два представления $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^m \beta_k \chi_{B_k}$. Обозначим через $E := \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{k=1}^m B_k$, $A_0 := E \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$, $B_0 := E \setminus \bigcup_{k=1}^m B_k$ и $\alpha_0 := \beta_0 := 0$. Тогда $\mu(E) < \infty$, $E = \bigcup_{i=0}^n A_i = \bigcup_{k=0}^m B_k$. Отметим, что $\alpha_i \mu(A_i \cap B_k) = \beta_k \mu(A_i \cap B_k)$ для всех $i = 0, \ldots, n$ и $k = 0, \ldots, m$. Следовательно, выполняются равенства

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mu(A_i) =$$
$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \alpha_i \mu(A_i \cap B_k) = \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^n \beta_k \mu(A_i \cap B_k) =$$
$$\sum_{k=0}^m \beta_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^m \beta_k \mu(B_k).$$

Таким образом, $\int \varphi \, d\mu$ не зависит от представления функции φ.

Покажем, что функционал $I_\mu : \varphi \mapsto \int \varphi \, d\mu$ из $\mathrm{St}(\Sigma)$ в $\mathbb{R}$ линеен. Пусть $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, $\psi = \sum_{i=1}^m \beta_k \chi_{B_k}$. Возьмем представление $\varphi + \psi = \sum_{r=1}^p \gamma_r \chi_{C_r} \in \mathrm{St}(\Sigma)$ так, чтобы выполнялось $\gamma_r \neq 0$ для всех $r = 1, \ldots, p$. Тогда $\bigcup_{r=1}^p C_r \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{k=1}^m B_k$.

Обозначим через $E := \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{k=1}^m B_k$, $A_0 := E \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$, $B_0 := E \setminus \bigcup_{k=1}^m B_k$, $C_0 := E \setminus \bigcup_{r=1}^p C_r$, $\alpha_0 := \beta_0 := \gamma_0 := 0$. Тогда $\mu(E) < \infty$,

$\bigcup_{r=0}^{p} C_r = \bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcup_{k=0}^{m} B_k = E$. Отметим, что

$$\gamma_r \mu(C_r \cap A_i \cap B_k) = (\alpha_i + \beta_k)\mu(C_r \cap A_i \cap B_k)$$

для всех r, i, k. Следовательно, справедливы равенства

$$\int \varphi + \psi \, d\mu = \sum_{r=1}^{p} \gamma_r \mu(C_r) = \sum_{r=0}^{p} \gamma_r \mu(C_r) =$$
$$\sum_{r=0}^{p}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \gamma_r \mu(C_r \cap A_i \cap B_k) = \sum_{r=0}^{p}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} (\alpha_i + \beta_k)\mu(C_r \cap A_i \cap B_k) =$$
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{r=0}^{p} \alpha_i \mu(C_r \cap A_i \cap B_k) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{r=0}^{p} \beta_k \mu(C_r \cap A_i \cap B_k) =$$
$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{k=0}^{m} \beta_k \mu(B_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(B_k) =$$
$$\int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu.$$

Таким образом, $I_\mu(\varphi+\psi) = I_\mu(\varphi)+I_\mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in \mathrm{St}(\Sigma)$. Очевидно, что $I_\mu(\alpha\varphi) = \alpha I_\mu(\varphi)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. $\triangleright$

Определение 1.4. Говорят, что некоторое свойство P выполняется *μ-почти всюду* (μ-п.в.), если мера множества, на котором свойство P не выполняется, равна нулю.

Примеры:

1. $f = g$ μ-п.в. означает, что $\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0$;

2. $f \geqslant g$ μ-п.в. означает, что $\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) < g(\omega)\}) = 0$;

3. $f \to f$ μ-п.в. означает, что $\mu(\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \nrightarrow f(\omega)\}) = 0$;

4. $f_n \uparrow f$ μ-п.в. означает, что $f_n \leqslant f_{n+1}$ μ-п.в. для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \to f$ μ-п.в. (следовательно, $f = \sup_n f_n$ μ-п.в.)

5. $f_n \downarrow f$ μ-п.в. означает, что $f_n \geqslant f_{n+1}$ μ-п.в. для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \to f$ μ-п.в. (следовательно, $f = \inf_n f_n$ μ-п.в.)

6. $0 \leqslant f_n \uparrow f$ μ-п.в. означает, что $f_n \geqslant 0$ μ-п.в., $f_n \leqslant f_{n+1}$ μ-п.в. для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \to f$ μ-п.в. (следовательно, $f = \sup_n f_n$ μ-п.в.)

Лемма 1.3. *Для Σ-ступенчатых функций φ и $\psi \in \mathrm{St}(\Sigma)$ справедливы следующие утверждения:*

(1) Если $\varphi \geqslant 0$ μ-п.в., то $I_\mu(\varphi) \geqslant 0$. В частности, если $\varphi \geqslant \psi$ μ-п.в., то $I_\mu(\varphi) \geqslant I_\mu(\psi)$ (монотонность I_μ).

(2) Если $\varphi = 0$ μ-п.в., то $I_\mu(\varphi) = 0$. В частности, если $\varphi = \psi$ μ-п.в., то $I_\mu(\varphi) = I_\mu(\psi)$.

(3) Если $\varphi \geqslant 0$ μ-п.в. и $I_\mu(\varphi) = 0$, то $\varphi = 0$ μ-п.в.

$\lhd$ (1) Пусть φ имеет представление $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ и $\varphi \geqslant 0$ μ-п.в. Если $I_\mu(\varphi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu A_i < 0$, то $\alpha_i \mu(A_i) < 0$ для некоторого i. Мы получили, что φ на множестве A_i положительной меры принимает отрицательное значение α_i, что противоречит условию $\varphi = 0$ μ-п.в. Таким образом, $I_\mu(\varphi) \geqslant 0$.

Если же $\varphi \geqslant \psi$ μ-п.в., то $\varphi - \psi \geqslant 0$ μ-п.в. и, как показано выше, $I_\mu(\varphi - \psi) \geqslant 0$. Пользуясь линейностью I_μ, получим $I_\mu(\varphi) \geqslant I_\mu(\psi)$.

(2) Пусть $\varphi = 0$ μ-п.в. Тогда $\varphi \geqslant 0$ μ-п.в. и $\varphi \leqslant 0$ μ-п.в. В виду линейности I_μ и утверждения (1) имеем $I_\mu(\varphi) \geqslant 0$ и $-I_\mu(\varphi) = I_\mu(-\varphi) \geqslant 0$. Следовательно, $I_\mu(\varphi) = 0$.

(3) Пусть $\varphi \geqslant 0$ μ-п.в. и $I_\mu(\varphi) = 0$. Предположим, что $\varphi \neq 0$ μ-п.в. Тогда множество $A := \{\omega \in \Omega : \varphi(\omega) > 0\}$ имеет положительную меру. Положим по $A_n := \{\omega \in \Omega : \varphi(\omega) > 1/n\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ и $\mu(A) > 0$, то в силу σ-субаддитивности меры μ найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $\mu(A_k) > 0$. Следовательно, в виду неравенства $\varphi \geqslant k^{-1}\chi_{A_k}$ и монотонности I_μ выполняются соотношения $I_\mu(\varphi) \geqslant I_\mu(k^{-1}\chi_{A_k}) = k^{-1}\mu(A_k) > 0$, что противоречит условию $I_\mu(\varphi) = 0$. Таким образом, $\varphi = 0$ μ-п.в. $\rhd$

Лемма 1.4. (Непрерывность I_μ) *Пусть последовательность Σ-ступенчатых функций $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{St}(\Sigma)$ такая, что $\varphi_n \downarrow 0$ μ-п.в. Тогда $I_\mu(\varphi_n) \downarrow 0$. В частности, если $\varphi_n \uparrow \varphi$ μ-п.в., $\varphi \in \mathrm{St}(\Sigma)$, то $I_\mu(\varphi_n) \uparrow I_\mu(\varphi)$.*

$\lhd$ Предположим сначала, что условия леммы выполнены всюду на Ω, т. е. $\varphi_n(\omega) \geqslant \varphi_{n+1}(\omega)$ и $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\omega) = \varphi(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим по определению $M := \max\{\varphi_1(\omega) : \omega \in \Omega\}$,

$B := \{\omega \in \Omega : \varphi_1(\omega) > 0\}$ и $E_n := \{\omega \in \Omega : \varphi_n(\omega) \geqslant \varepsilon\}$. Тогда $E_n \downarrow \emptyset$ и в силу непрерывности μ выполняется $\mu(E_n) \downarrow 0$. Зафиксируем номер $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\mu(E_n) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant k$. Так как $E_n \subset B$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то справедливы соотношения

$$0 \leqslant \varphi_n \leqslant \varphi_k = \varphi_k \chi_B = \varphi_k \chi_{E_k} + \varphi_k \chi_{B \setminus E_k} \leqslant M\chi_{E_k} + \varepsilon \chi_B$$

для всех $n \geqslant k$. Тогда в силу Леммы 1.3(1) выполняются неравенства

$$0 \leqslant I_\mu(\varphi_n) \leqslant I_\mu(M\chi_{E_k} + \varepsilon\chi_B) = M\mu(E_k) + \varepsilon\mu(B) \leqslant \varepsilon(M + \mu(B))$$

для всех $n \geqslant k$. Следовательно, $\lim_n I_\mu(\varphi_n) = 0$.

Пусть теперь $\varphi_n \downarrow 0$ μ-п.в. Обозначим через $E := \{\omega \in \Omega : \varphi_n(\omega) \downarrow 0\}$. Тогда $\chi_E \varphi_n \downarrow 0$ и в силу рассуждений выше $I_\mu(\chi_E \varphi_n) \downarrow 0$. Но так как $\chi_E \varphi_n = \varphi_n$ μ-п.в., то по лемме 1.3(2) $I_\mu(\chi_E \varphi_n) = I_\mu(\varphi_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $I_\mu(\varphi_n) \downarrow 0$.

Предположим, что $\varphi_n \uparrow \varphi$ μ-п.в. Тогда $\varphi - \varphi_n \downarrow 0$ μ-п.в. и в силу доказанного выше $I_\mu(\varphi) - I_\mu(\varphi_n) = I_\mu(\varphi - \varphi_n) \downarrow 0$. Таким образом, $I_\mu(\varphi_n) \uparrow I_\mu(\varphi)$. $\triangleright$

Теорема 1.1. *Пусть функция $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$ и две последовательности Σ-ступенчатых функций $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ и $(\psi_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{St}(\Sigma)$ такие, что $\varphi_n \uparrow f$ μ-п.в. и $\psi_n \uparrow f$ μ-п.в. Тогда $\lim_n I_\mu(\varphi_n) = \lim_n I_\mu(\psi_n)$.*

$\triangleleft$ Зафиксируем произвольный $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\varphi_m \wedge \psi_n \uparrow_n \varphi_m \wedge f = \varphi_m$ μ-п.в. В силу леммы 1.2(1) $\varphi_m \wedge \psi_n \in \mathrm{St}(\Sigma)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В виду порядковой непрерывности и монотонности I_μ (леммы 1.4 и 1.3(1)) справедливы соотношения $I_\mu(\varphi_m) = \lim_n I_\mu(\varphi_m \wedge \psi_n) \leqslant \lim_n I_\mu(\psi_n)$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\lim_n I_\mu(\varphi_n) \leqslant \lim_n I_\mu(\psi_n)$. Аналогично можно показать, что $\lim_n I_\mu(\psi_n) \leqslant \lim_n I_\mu(\varphi_n)$. $\triangleright$

Определение 1.5. Функция $0 \leqslant f \in \mathcal{L}^0(\mu)$ μ-п.в. называется *интегрируемой*, если существует последовательность Σ-ступенчатых функций $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ такая, что $0 \leqslant \varphi_n \uparrow_n f$ μ-п.в. и $\lim_n \int \varphi_n \, d\mu = \sup_n \int \varphi_n \, d\mu < \infty$. При этом будем полагать $I_\mu(f) := \int f \, d\mu := \lim_n \int \varphi_n \, d\mu = \sup_n \int \varphi_n \, d\mu$.

Таким образом,

$$0 \leqslant \int f\ d\mu := \lim_n \int \varphi_n\ d\mu = \sup_n \int \varphi_n\ d\mu.$$

Замечание 1.1. Из теоремы 1.1 следует, что $I_\mu(f)$ не зависит от выбора $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \mathrm{St}(\Sigma)$. Следовательно, если функция $f \geqslant 0$ μ-п.в. интегрируема и для некоторой функции $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ выполняется $g = f$ μ-п.в., то g интегрируема и $\int g\ d\mu = \int f\ d\mu \geqslant 0$. Действительно, если $0 \leqslant \varphi_n \uparrow f$ μ-п.в. и $f = g$ μ-п.в., то $0 \leqslant \varphi_n \uparrow g$ μ-п.в. и $\int g\ d\mu = \lim_n \int \varphi_n\ d\mu = \int f\ d\mu$. В частности, если $f = 0$ μ-п.в., то $\int f\ d\mu = 0$.

Теорема 1.2. *Пусть функции $0 \leqslant f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ μ-п.в. и $0 \leqslant \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $f+g$ и αf также интегрируемы и справедливы равенства*

$$\int f+g\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu, \quad \int \alpha f\ d\mu = \alpha \int f\ d\mu.$$

$\lhd$ По условию теоремы существуют последовательности Σ-ступенчатых функций $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ и $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ такие, что $0 \leqslant \varphi_n \uparrow f$ μ-п.в., $0 \leqslant \psi_n \uparrow g$ μ-п.в. и выполняются равенства $\int f\ d\mu = \lim_n \int \varphi_n\ d\mu$, $\int g\ d\mu = \lim_n \int \psi_n\ d\mu$. Тогда $0 \leqslant \varphi_n + \psi_n \uparrow f + g$ μ-п.в. и по лемме 1.2.(1) последовательность $(\varphi_n + \psi_n)_{n=1}^\infty$ является Σ-ступенчатой. В силу леммы 1.1.(2) I_μ линеен на Σ-ступенчатых функциях. Следовательно, справедливы равенства

$$\int f\ d\mu + \int g\ d\mu = \lim_n \int \varphi_n\ d\mu + \lim_n \int \psi_n\ d\mu =$$
$$\lim_n \int \varphi_n + \psi_n\ d\mu = \int f + g\ d\mu.$$

Аналогично можно показать, что функция αf интегрируема и справедливо равенство$\int \alpha f\ d\mu = \alpha \int f\ d\mu$. $\rhd$

Теорема 1.3. *Пусть функции $f, g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ такие, что f интегрируема, $0 \leqslant g \leqslant f$ μ-п.в. Тогда g интегрируема и справедливы неравенства $0 \leqslant \int g\ d\mu \leqslant \int f\ d\mu$.*

$\lhd$ По условию существует последовательность Σ-ступенчатых функций $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ такая, что $0 \leqslant \varphi_n \uparrow f$ μ-п.в., $\int f\ d\mu = \lim_n \int \varphi_n\ d\mu$. По лемме

1.4 найдется последовательность Σ-простых функций $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $0 \leqslant g_n \uparrow g$ μ-п.в. Тогда последовательность $(\varphi_n \wedge g_n)_{n=1}^{\infty}$ состоит из Σ-ступенчатых функций и удовлетворяет соотношениям $0 \leqslant \varphi_n \wedge g_n \uparrow g$ μ-п.в. В силу монотонности I_μ имеем $0 \leqslant \int \varphi_n \wedge g_n \, d\mu \uparrow_n \leqslant \int f \, d\mu$. Следовательно, существует $\lim_n \int \varphi_n \wedge g_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu$. Таким образом, функция g интегрируема, $0 \leqslant \int g \, d\mu = \lim_n \int \varphi_n \wedge g_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu$. $\rhd$

Определение 1.6. Произвольная функция $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$ называется *интегрируемой*, если интегрируемы функции $f^+ := f \vee 0$ и $f^- := f \wedge 0$. При этом будем полагать

$$I_\mu(f) := \int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu. \tag{2}$$

Символом $\mathcal{L}^1(\mu)$ будем обозначать множество всех интегрируемых функций. Таким образом, мы получили функционал $I_\mu : f \mapsto \int f \, d\mu$ из $\mathcal{L}^1(\mu)$ в $\mathbb{R}$.

Теорема 1.4. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если функции $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ такие, что $|g| \leqslant |f|$ μ-п.в., то $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$;*

(2) *Множество $\mathcal{L}^1(\mu)$ является порядковым идеалом в $\mathcal{L}^0(\mu)$;*

(3) *Отображение $I_\mu : f \mapsto \int f \, d\mu$ из $\mathcal{L}^1(\mu)$ в $\mathbb{R}$ является линейным функционалом.*

(4) *Если $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ такие, что $f = g$ μ-п.в., то $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $I_\mu(f) = I_\mu(g)$;*

(5) *Если $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $f \geqslant g$ μ-п.в., то $I_\mu(f) \geqslant I_\mu(g)$ (монотонность I_μ);*

(6) *Для функции $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ выполняется $I_\mu(|g|) = 0$, тогда и только тогда $g = 0$ μ-п.в.*

$\lhd$ (1) Отметим сначала, что функция $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$ интегрируема тогда и только тогда, когда $|f|$ интегрируема. Действительно, если $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, то по определению $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Тогда по теореме 1.2 интегрируема их сумма $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Обратно, пусть $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Тогда в виду неравенств $0 \leqslant f^+, f^- \leqslant |f|$ и теоремы 1.3 f^+ и $f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Следовательно, по определению 1.6 $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ такие, что $|g| \leqslant |f|$ μ-п.в. Тогда интегрируемость $|g|$ следует из теоремы 1.3. Следовательно, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(2) Пусть $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. По теореме 1.2 $|f| + |g| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $|\alpha||f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Так как $|f+g| \leqslant |f| + |g|$ и $|\alpha f| \leqslant |\alpha||f|$, то в виду утверждения (1) $f+g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Таким образом, $\mathcal{L}^1(\mu)$ —векторное пространство, удовлетворяющее утверждению (1), следовательно, является порядковым идеалом в $\mathcal{L}^0(\mu)$.

(3) Из утверждений (1) и (2) следует, что $\mathcal{L}^1(\mu)$ является векторной решёткой (даже идеалом в $\mathcal{L}^0(\mu)$). В силу теоремы 1.2 функционал I_μ аддитивен и положительно однороден на положительных функциях из $\mathcal{L}^1(\mu)$. Кроме того, в виду теоремы 1.3 $I_\mu(f) \geqslant 0$ для всех $f \geqslant 0$ μ-п.в. Следовательно, по теореме Канторовича [1, Теорема 1.10] функционал I_μ единственным образом продолжается на $\mathcal{L}^1(\mu)$ по формуле (2).

(4) Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ такие, что $f = g$ μ-п.в. Тогда $f^+ = g^+$ μ-п.в. и $f^- = g^-$ μ-п.в. В силу замечания 1.1 $I_\mu(f^+) = I_\mu(g^+)$, $I_\mu(f^-) = I_\mu(g^-)$. Следовательно, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $I_\mu(f) = I_\mu(g)$.

(5) Пусть $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \geqslant g$ μ-п.в. Тогда $f - g \geqslant 0$ μ-п.в. В силу утверждения (3) и теоремы 1.3 $I_\mu(f) - I_\mu(g) = I_\mu(f-g) \geqslant 0$. Следовательно, $I_\mu(f) \geqslant I_\mu(g)$.

(6) Пусть для некоторой функции $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ выполняется $I_\mu(|g|) = 0$. Тогда в виду неравенств $0 \leqslant g^+, g^- \leqslant |g|$ и утверждения (5) $I_\mu(g^+) = I_\mu(g^-) = 0$. Следовательно, в силу определения 1.5 и леммы 1.3(3) $g^+ = g^- = 0$ μ-п.в. Таким образом, $g = g^+ - g^- = 0$ μ-п.в.

Обратно. Пусть $g = 0$ μ-п.в. Тогда в силу замечания 1.1 $I_\mu(g) = 0$. $\rhd$

Лемма 1.5. *Пусть $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$ и последовательность интегрируемых функций $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ удовлетворяет условиям $0 \leqslant f_n \uparrow_n f$ μ-п.в., $\lim_n \int f_n \, d\mu < \infty$. Тогда $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \geqslant 0$ μ-п.в. и $\int f \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu$.*

$\lhd$ Для каждого $i \in \mathbb{N}$ возьмём последовательность Σ-ступенчатых функций $(\varphi_n^i)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{St}(\Sigma)$, удовлетворяющую условиям $0 \leqslant \varphi_n^i \uparrow_n f_i$ μ-

п.в. и $\lim_n \int \varphi_n^i \, d\mu = \int f_i \, d\mu$. Положим по определению $\psi_n := \bigvee_{i=1}^n \phi_n^i$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $0 \leqslant \psi_n \uparrow_n f$ μ-п.в. и в силу теоремы 1.4(5) выполняются соотношения $\lim_n \int \psi_n \, d\mu \leqslant \lim_n \int f_n \, d\mu < \infty$. Таким образом, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \geqslant 0$ μ-п.в. и по определению $\int f \, d\mu = \lim_n \int \psi_n \, d\mu$.

Заметим, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\varphi_n^i \leqslant \psi_n$ для всех $n \geqslant i$. Тогда в силу теоремы 1.4(5) справедливы соотношения $\int f_i \, d\mu = \lim_n \int \varphi_n^i \, d\mu \leqslant \lim_n \int \psi_n \, d\mu$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\lim_i \int f_i \, d\mu \leqslant \lim_n \int \psi_n \, d\mu$. Так как выше было показано, что $\int f \, d\mu = \lim_n \int \psi_n \, d\mu \leqslant \lim_n \int f_n \, d\mu$, получим $\int f \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu$. $\rhd$

Теорема 1.5. (Непрерывность I_μ) *Пусть последовательность интегрируемых функций $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ удовлетворяет условию $f_n \downarrow_n 0$ μ-п.в. Тогда $\lim_n \int f_n \, d\mu = 0$ (следовательно, $\int f_n \, d\mu \downarrow_n 0$).*

$\lhd$ Положим по определению $g_n := f_1 - f_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $g_n \uparrow_n f_1$ μ-п.в. В силу леммы 1.5 и линейности I_μ (теорема 1.4(3)) выполняются соотношения $\int f_1 \, d\mu = \lim_n \int f_1 - f_n \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \lim_n \int f_n \, d\mu$. Таким образом, $\lim_n \int f_n \, d\mu = 0$. $\rhd$

Лемма 1.6. *Предположим, что $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$ для некоторого множества $A \in \Sigma$. Тогда $\int \chi_A \, d\mu = \mu(A)$ (следовательно, $\mu(A) < \infty$).*

$\lhd$ Пусть $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Возьмём последовательность $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{St}(\Sigma)$ такую, что $0 \leqslant \varphi_n \uparrow_n \chi_A$ μ-п.в. Положим по определению $E := \{\omega \in \Omega : 0 \leqslant \varphi_n(\omega) \uparrow_n \chi_A(\omega)\}$ и $A_n := \{\omega \in E : \varphi_n(\omega) > 0\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $A_n \subset A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $A = \bigcup_n A_n$. Ясно, что $\chi_{A_n} \in \mathrm{St}(\Sigma)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и выполняются соотношения $0 \leqslant \chi_{A_n}(\omega) \uparrow_n \chi_A(\omega)$ для всех $\omega \in E$. Следовательно, $0 \leqslant \chi_{A_n} \uparrow_n \chi_A$ μ-п.в. и в виду непрерывности μ справедливы равенства $\int \chi_A \, d\mu = \lim_n \int \chi_{A_n} \, d\mu = \lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$.$\rhd$

Теорема 1.6. (Неравенство Чебышева) *Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \geqslant 0$ μ-п.в. и $0 < \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int f \, d\mu.$$

$\lhd$ Положим по определению $A := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geqslant \alpha\}$. Тогда в силу теорем 1.4 выполняются соотношения $\int f\ d\mu = \int \chi_A f\ d\mu + \int \chi_{A^c} f\ d\mu \geqslant \int \chi_A f\ d\mu \geqslant \int \chi_A \alpha\ d\mu$. Так как $\alpha\chi_A \leqslant f$, то в виду леммы 1.6 $\int \chi_A \alpha\ d\mu = \alpha\mu(A)$. Таким образом, $\int f\ d\mu \geqslant \alpha\mu(A)$. $\rhd$

Теорема 1.7. (Леви) *Пусть последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ *удовлетворяет условиям* $f_n \leqslant f_{n+1}$ μ*-п.в. для всех* $n \in \mathbb{N}$, $\lim_n \int f_n\ d\mu < \infty$. *Тогда существует функция* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *такая, что* $f_n \uparrow_n f$ μ*-п.в. и* $\int f\ d\mu = \lim_n \int f_n\ d\mu$ *(следовательно,* $\int f_n\ d\mu \uparrow_n \int f\ d\mu$*).*

$\lhd$ Без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $f(\omega) := \lim_n f_n(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и $M := \lim_n \int f_n\ d\mu < \infty$. Введем обозначения: $A := \{\omega \in \Omega : f(\omega) = \infty\}$, $A_n^i := \{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \geqslant i\}$ для всех $i, n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i, \quad A_n^i \subset A_{n+1}^i$$

для всех $i, n \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу монотонности, непрерывности μ и неравенства Чебышёва будем иметь

$$\mu(A) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i\Big) = \lim_n \mu(A_n^i) \leqslant \lim_n \frac{1}{i} \int f_n\ d\mu \leqslant \frac{M}{i}$$

для всех $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\mu(A) = 0$ и $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$. И так, мы получили, что $0 \leqslant f_n \uparrow_n f$, $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$ и $\lim_n \int f_n\ d\mu < \infty$. В силу леммы 1.5 $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $\int f\ d\mu = \lim_n \int f_n\ d\mu$. $\rhd$

Напомним, что для произвольной последовательности функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ можно определить $\liminf f_n := \lim_n \inf_{m \geqslant n} f_m = \sup_n \inf_{m \geqslant n} f_m$ (так как $\inf_{m \geqslant n} f_m \uparrow_n$). Аналогично, $\limsup f_n := \lim_n \sup_{m \geqslant n} f_m = \inf_n \sup_{m \geqslant n} f_m$ (так как $\sup_{m \geqslant n} f_m \downarrow_n$). Если $\liminf f_n = \limsup f_n$, то существует $\lim_n f_n$ и $\lim_n f_n = \liminf f_n = \limsup f_n$.

Теорема 1.8. (Лемма Фату) *Пусть последовательность интегрируемых функций* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ *такая, что* $f_n \geqslant 0$ μ*-п.в. для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\liminf \int f_n\ d\mu < \infty$ *(*$\equiv \sup_m \inf_{n \geqslant m} \int f_n\ d\mu < \infty$*). Тогда функция* $\liminf f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *и* $\int \liminf f_n\ d\mu \leqslant \liminf \int f_n\ d\mu$.

$\lhd$ Без ограничения общности можно считать, что $f_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $g_n(\omega) := \inf_{m \geqslant n} f_m(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $g_n \in \mathcal{L}^0(\mu)$, $0 \leqslant g_n \leqslant f_m$ для всех $m \geqslant n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ и $0 \leqslant g_n \uparrow_n \liminf f_n \in \mathcal{L}^0(\mu)$. По теореме 1.4 и $g_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $\int g_n \, d\mu \leqslant \inf_{m \geqslant n} \int f_m \, d\mu$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу в последнем неравенстве, получим $\lim_n \int g_n \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu < \infty$. Таким образом, в силу леммы 1.4 $\liminf f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $\int \liminf f_n \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu$.$\rhd$

Теорема 1.9. (Лебега о мажорированной сходимости) *Пусть последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ *удовлетворяет условиям* $|f_n| \leqslant g$ *μ-п.в. и* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Если* $f_n \to f$ *μ-п.в., то* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *и выполняются равенства* $\lim_n \int f_n \, d\mu = \int \lim_n f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

$\lhd$ Ясно, что $|f| \leqslant g$ μ-п.в. и интегрируемость f следует из теоремы 1.4. Последовательность $(g - f_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условия леммы Фату, так как $0 \leqslant g - f_n \leqslant 2g$ μ-п.в. и $\liminf \int g - f_n \, d\mu \leqslant 2 \int g \, d\mu < \infty$. Более того, $\liminf(g - f_n) = g - f$ μ-п.в. Следовательно, в силу леммы Фату и линейности I_μ справедливы соотношения

$$\int g \, d\mu - \int f \, d\mu = \int g - f \, d\mu = \int \liminf(g - f_n) \, d\mu \leqslant \liminf \int g - f_n \, d\mu =$$
$$\liminf \Big(\int g \, d\mu - \int f_n \, d\mu \Big) = \int g \, d\mu - \limsup \int f_n \, d\mu.$$

Таким образом, $\limsup \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu$.

Применяя аналогичные рассуждения к последовательности $(g + f_n)_{n=1}^{\infty}$ и учитывая соотношения $\liminf(g + f_n) = g + f$ μ-п.в. и $\liminf \int g + f_n \, d\mu \leqslant 2 \int g \, d\mu < \infty$, получим

$$\int g \, d\mu + \int f \, d\mu = \int g + f \, d\mu = \int \liminf(g + f_n) \, d\mu \leqslant \liminf \int g + f_n \, d\mu =$$
$$\liminf \Big(\int g \, d\mu + \int f_n \, d\mu \Big) = \int g \, d\mu + \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Следовательно, $\int f \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu$. Таким образом, $\limsup \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu$. Но так как $\liminf \int f_n \, d\mu \leqslant \limsup \int f_n \, d\mu$, получим $\int f \, d\mu = \limsup \int f_n \, d\mu = \liminf \int f_n \, d\mu$. Следовательно, $\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$. $\rhd$

Замечание 1.2. Введём в пространстве $\mathcal{L}^0(\mu)$ отношение эквивалентности: $f \sim g$ по определению означает $f = g$ μ-п.в. Пространство классов эквивалентных функций обозначают символом $L^0(\mu) := \mathcal{L}^0/\sim$. В пространстве $L^0(\mu)$ вводят алгебраические и решеточное операции следующим образом: $\widetilde{f}+\widetilde{g} := \widetilde{f+g}$, $\lambda\widetilde{f} := \widetilde{\lambda f}$, $\widetilde{f}\vee\widetilde{g} := \widetilde{f \vee g}$, $\widetilde{f}\wedge\widetilde{g} := \widetilde{f \wedge g}$ для всех классов эквивалентности $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in L^0(\mu)$ и чисел $\lambda \in \mathbb{R}$. Относительно введённых операций $L^0(\mu)$ является векторной решёткой, а пространство классов эквивалентности интегрируемых функций $L^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu)/\sim$ является идеалом в $L^0(\mu)$ и, следовательно, векторной подрешеткой. Так как интегралы от эквивалентных функций совпадают, то можно определить интеграл на $L^1(\mu)$ следующим образом: $\int \widetilde{f}\ d\mu := \int f\ d\mu$ для всех $\widetilde{f} \in L^1(\mu)$. При этом $\int |\widetilde{f}|\ d\mu = 0$ тогда и только тогда, когда $|\widetilde{f}| = 0$.

Замечание 1.3. Ввиду того, что интеграл не зависит от значений, принимаемых функцией на множестве нулевой меры, можно рассматривать функции, принимающие значения $+\infty$ и $-\infty$ на множествах меры нуль. При этом свойства интеграла на $L^1(\mu)$ сохраняться, а состав элементов $L^1(\mu)$ не изменятся.

Литература

1. *Aliprantis C. D., and Burkinshaw O.* Positive Operators, Springer, 1985, 376 p.
2. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Principles of Real Analysis.—N. Y.: Acad. Press, 1998.—426 p.
3. *Kusraev, A. G.* Dominated Operators, Springer, 2000, 446 p.
4. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices, Berlin etc.: Springer, 1991, 395 p.

Порядковое интегрирование и теорема типа Рисса-Маркова о представлении положительных операторов

Курс лекций

Тасоев Б.Б.
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН.

Владикавказ 2023

Лекция №2. Теорема Рисса–Маркова.

В данной лекции предлагается новый подход к доказательству теоремы Рисса–Маркова, основанный на теории векторных решёток. Предлагаемое доказательство представляется более простым и локаничным.

Упорядоченным векторным пространством над полем $\mathbb{R}$ называют пару $E := (E, \leqslant)$, где E — векторное пространство, $\leqslant$ — отношение порядка, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) если $x \geqslant y$, то $x + z \geqslant y + z$ для всех $x, y, z \in E$;

(2) если $x \geqslant y$, то $\alpha x \geqslant \alpha y$ для всех $0 \leqslant \alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$.

Векторной решёткой называют упорядоченное векторное пространство E, в котором для любых элементов $x, y \in E$ существуют $x \vee y := \sup\{x, y\}$ и $x \wedge y := \inf\{x, y\}$.

Пусть E — векторная решётка и $x \in E$. Тогда в E существуют следующие элементы: $|x| := x \vee (-x)$, $\quad x^+ := x \vee 0$, $\quad x^- := (-x)^+ = -(x \wedge 0)$.

Примеры векторных решеток:

(a) $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел. Для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha \vee \beta = \max\{\alpha, \beta\}$, $\quad \alpha \wedge \beta = \min\{\alpha, \beta\}$, $\quad \alpha^+ := \alpha \vee 0 = \max\{\alpha, 0\}$,

$\alpha^- := -(\alpha \wedge 0) = -\min\{\alpha, 0\}$, $\quad |\alpha| := \alpha \vee (-\alpha)$.

(b) $\mathbb{R}^\Omega$ — множество всех функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \neq 0)$. Для $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$

$$f \leqslant g \Leftrightarrow f(\omega) \leqslant g(\omega), \quad (\omega \in \Omega)$$

$$f \vee g(\omega) := f(\omega) \vee g(\omega), \quad f \wedge g(\omega) := f(\omega) \wedge g(\omega).$$

В частности, $|f|(\omega) = |f(\omega)|$, $\quad f^+(\omega) = f(\omega)^+$, $\quad f^-(\omega) = f(\omega)^-$.

Порядковым идеалом в векторной решётке E называется векторное подпространство E_0 в E такое, что если $x \in E$ и $z \in E_0$ удовлетворяют неравенству $|x| \leqslant |z|$, то $x \in E_0$. Всякий порядковый идеал является векторной подрешёткой.

Примеры порядковых идеалов:

(a) $l_0 = \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Пространство l_p абсолютно сходящихся последовательностей с p-ой степенью является порядковым идеалом в l_0 $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

(b) $E := \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu) \subset \mathbb{R}^\Omega$. Пространство $\mathcal{L}^p(\mu)$ интегрируемых с p-ой степенью функций является порядковым идеалом в E ($1 \leqslant p \leqslant \infty$). В частности, пространство $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ измеримых ограниченных функций является порядковым идеалом в E.

Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой (т.е. Ω — непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств множества Ω, $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ — мера), E — векторная подрешетка в $\mathbb{R}^\Omega$.

Для последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty \subset E$ и функции $x \in E$ запись $0 \leqslant x_n \uparrow x$ будет означать, что $0 \leqslant x_n(\omega) \leqslant x_{n+1}(\omega)$ и $\sup_n x_n(\omega) = x(\omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$. Аналогично, запись $x_n \downarrow 0$ будет означать, что $x_n(\omega) \geqslant x_{n+1}(\omega)$ и $\inf_n x_n(\omega) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$.

Линейный функционал $T : E \to \mathbb{R}$ называется *положительным*, если $Tx \geqslant 0$ для всех $0 \leqslant x \in E$.

Положительный функционал $T : E \to \mathbb{R}$ называется *порядково σ-непрерывным*, если для всякой последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty \subset E$ и $x \in E$ таких, что $0 \leqslant x_n \uparrow x$, следует $0 \leqslant Tx_n \uparrow Tx$ (или, эквивалентно, соотношение $x_n \downarrow 0$ влечёт $Tx_n \downarrow 0$).

Пример. Пусть $E := \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство измеримых интегрируемых функций, $T : f \mapsto \int f \, d\mu$ для всех $f \in E$. Тогда $T : E \to \mathbb{R}$ — линейный положительный порядково σ-непрерывный функционал.

Всюду далее X — компактное хаусдорфово топологическое пространство ($\equiv$ компакт), $C(X)$ — векторная решётка всех непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$.

Определение 2.1. *Борелевской σ-алгеброй* на множестве X называется наименьшая σ-алгебра Σ_{Bor}, содержащая все замкнутые множества в X. Элементы из Σ_{Bor} будем называют *борелевскими множествами.*

Определение 2.2. *Бэровской σ-алгеброй* на множестве X называется наименьшая σ-алгебра Σ_{Ba}, относительно которой все функции из $C(X)$ измеримы. Элементы из Σ_{Ba} называют *бэровскими множествами.*

Известно, что бэровская σ-алгебра Σ_{Ba} совпадает с наименьшей σ-алгеброй, содержащей все замкнутые G_δ-множества [3, Предложение 21].

Напомним, что подмножество $A \subset X$ называется *G_δ-множеством*, если найдется последовательность $(G_n)_{n=1}^\infty$ открытых множеств такая, что $A = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$.

Ясно, что $\Sigma_{Ba} \subset \Sigma_{Bor}$. В топологических пространствах со счетной базой справедливо равенство $\Sigma_{Ba} = \Sigma_{Bor}$. В частности, в компактных метрических пространствах, а также в $\mathbb{R}^n$ верно $\Sigma_{Ba} = \Sigma_{Bor}$ ([3, Теорема 20], [2, §50, Теорема E]).

Определение 2.3. Пусть Σ — некоторая σ-алгебра подмножеств компакта X. Мера $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ называется *регулярной*, если для всех $A \in \Sigma$ выполняется равенство

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \in \Sigma,\ K \text{ замкнуто},\ K \subset A\}.$$

Если $\Sigma = \Sigma_{Bor}$, то регулярную меру $\mu : \Sigma_{Bor} \to \mathbb{R}$ называют *регулярной борелевской мерой.*

Если $\Sigma = \Sigma_{Ba}$, то регулярную меру $\mu : \Sigma_{Ba} \to \mathbb{R}$ называют *регулярной бэровской мерой.*

Лемма 2.1 [3, §21.6, Предложение 22]. *Пусть X — компакт, Σ_{Ba} — бэровская σ-алгебра, $\mu : \Sigma_{Ba} \to \mathbb{R}$ — мера. Тогда μ регулярная бэровская мера.*

Лемма 2.2 [2, §54, Теорема D]. *Пусть X — компакт, Σ_{Ba} — бэровская σ-алгебра, $\mu : \Sigma_{Ba} \to \mathbb{R}$ — мера. Тогда существует единственная регулярная борелевская мера $\tilde{\mu} : \Sigma_{Bor} \to \mathbb{R}$ такая, что $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ для всех $A \in \Sigma_{Ba}$.*

Определение 2.4. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется бэровской, если $f^{-1}(B) \in \Sigma_{Ba}$ для всякого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ (или, эквивалентно, $\{x \in X : f(x) < c\} \in \Sigma_{Ba}$ для любого $c \in \mathbb{R}$).

Символом $Ba(X)$ будем обозначать множество всех бэровских функций на X, а через $B(X)$ — множество всех ограниченных функций из $Ba(X)$. Ясно, что $C(X) \subset B(X) \subset Ba(X)$.

Теорема 2.1. [1, Теорема 2.1] *Пусть X — компакт, $B(X)$ — пространство всех ограниченных бэровских функций на X, $\phi : C(X) \to \mathbb{R}$ —*

линейный положительный функционал. Тогда существует единственный линейный положительный порядково σ-непрерывный функционал $\widetilde{\phi} : B(X) \to \mathbb{R}$ такой, что $\widetilde{\phi}(f) = \phi(f)$ для всех $f \in C(X)$.

Теорема 2.2. *Пусть X — компакт и $T : C(X) \to \mathbb{R}$ — линейный положительный функционал. Тогда существует единственная регулярная бэровская мера $\mu : \Sigma_{Ba} \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $f \in C(X)$ справедливо представление*

$$T(f) = \int f \, d\mu. \tag{1}$$

$\lhd$ По теореме 2.1 существует линейный положительный порядково σ-непрерывный функционал $\widetilde{T} : B(X) \to \mathbb{R}$ такой, что $\widetilde{T}(f) = T(f)$ для всех $f \in C(X)$. Положим по определению

$$\mu(A) := \widetilde{T}(\chi_A)$$

для всех $A \in \Sigma_{Ba}$. Покажем, что функция $\mu : \Sigma_{Ba} \to \mathbb{R}$ является мерой.

Действительно, $\mu(\emptyset) = \widetilde{T}(\chi_\emptyset) = \widetilde{T}(0) = 0$. Пусть $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \Sigma_{Ba}$ такая, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Обозначим через $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ и отметим, что $0 \leqslant \sum_{n=1}^k \chi_{A_n} = \chi_{\bigcup_{n=1}^k A_n} \uparrow_k \chi_A$. Следовательно, в силу линейности, положительности и порядково σ-непрерывности $\widetilde{T}$ выполняются равенства

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^k \mu(A_n) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^k \widetilde{T}(\chi_{A_n}) =$$
$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{T}\Big(\sum_{n=1}^k \chi_{A_n}\Big) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{T}(\chi_{\bigcup_{n=1}^k A_n}) = \widetilde{T}(\chi_A) = \mu(A).$$

Таким образом, μ — мера. Ясно, что $\mu(X) = \widetilde{T}(\chi_X) < \infty$.

Установим справедливость представления

$$\widetilde{T}(g) = \int g \, d\mu$$

для всех $g \in B(X)$. В виду равенства $g = g^+ - g^-$, достаточно ограничиться положительными функциями $g \in B(X)$. Пусть $0 \leqslant g \in B(X)$. Существует число $C > 0$ такое, что $g \leqslant C\chi_X$. Так как функция $C\chi_X \in B(X)$

интегрируема, то по теореме 1.3 (лекция №1) g также интегрируема. Следовательно, по определению 1.5 (лекция №1) существует последовательность Σ_{Ba}-ступенчатых функций $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $0 \leqslant \varphi_n \uparrow_n g$ μ-п.в. и $\int g\ d\mu = \sup_n \int \varphi_n\ d\mu$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant \varphi_n \uparrow_n g$. Каждая функция φ_n имеет вид $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i \chi_{A_i}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \Sigma_{Ba}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\int \varphi_n\ d\mu = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i \widetilde{T}(\chi_{A_i}) = \widetilde{T}\Big(\sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i \chi_{A_i} \Big) = \widetilde{T}(\varphi_n).$$

Следовательно, в виду порядково σ-непрерывности $\widetilde{T}$ справедливы равенства

$$\int g\ d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \varphi_n\ d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{T}(\varphi_n) = \widetilde{T}(g).$$

Таким образом, $\widetilde{T}(g) = \int g\ d\mu$ для всех $0 \leqslant g \in B(X)$ и, тем самым, справедливо представление (1).

Покажем единственность меры μ. Предположим, что существует регулярная бэровская мера $\lambda : \Sigma_{Ba} \to \mathbb{R}$ такая, что $T(f) = \int f\ d\lambda$ для всех $f \in C(X)$. Так как $\lambda(X) < \infty$, то все функции из $B(X)$ интегрируемы по мере λ. Положим по определению

$$T_\lambda(g) := \int g\ d\lambda$$

для всех $g \in B(X)$. Тогда в силу теорем 1.4 и 1.5 (лекция №1) функционал $T_\lambda : B(X) \to \mathbb{R}$ линеен, положителен и порядково σ-непрерывен. Кроме того, $T_\lambda(f) = T(f)$ для всех $f \in C(X)$. Тогда в силу единственности $\widetilde{T}$ справедливо равенство $\widetilde{T}(g) = T_\lambda(g)$ для всех $g \in B(X)$. Следовательно, $\lambda(A) = \int \chi_A\ d\lambda = T_\lambda(\chi_A) = \widetilde{T}(\chi_A) = \mu(A)$ для всех $A \in \Sigma_{Ba}$. Таким образом, $\mu = \lambda$. Регулярность меры μ следует из леммы 2.1. $\triangleright$

Следствие 2.1 (теорема Рисса-Маркова). *Пусть X — компакт, $F : C(X) \to \mathbb{R}$ — линейный положительный функционал. Тогда существует единственная регулярная борелевская мера $\mu : \Sigma_{Bor} \to \mathbb{R}$ такая,* *что для всех* $f \in C(X)$ *справедливо представление*

$$F(f) = \int f \ d\mu.$$

$\lhd$ Доказательство следует из теоремы 2.2 и лемм 2.1 и 2.2. $\rhd$

Литература

1. *Coquand, T.* A note on measures with values in a partially ordered vector space // Positivity—2004—V.8, pp. 395–400.
2. *Halmos, P.R.* Measure Theory, Springer New York, 1974, 304+XII p.
3. *Royden H.L., Fitzpatric P.M.* Real Analysis, Pearson; 4th edition, 1974, 505 p.

Порядковое интегрирование и теорема типа Рисса-Маркова о представлении положительных операторов

Курс лекций

Тасоев Б.Б.
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН.

Владикавказ 2023

Лекция №3. Интеграл Лебега по векторной мере со значениями в сигма-полной векторной решётке.

В данной лекции предлагается конструкция интеграла Лебега по векторной мере со значениями в порядково σ-полной векторной решётке. Схематически данная конструкция была предложена в работе Райта [4], полное обоснование которой обеспечивается дословным воспроизведением конструкции интеграла Лебега по скалярной мере, рассмотренной в лекции №1.

Упорядоченным векторным пространством над полем $\mathbb{R}$ называют пару $E := (E, \leqslant)$, где E — векторное пространство, $\leqslant$ — отношение порядка, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) если $x \geqslant y$, то $x + z \geqslant y + z$ для всех $x, y, z \in E$;

(2) если $x \geqslant y$, то $\alpha x \geqslant \alpha y$ для всех $0 \leqslant \alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$.

Векторной решёткой называют упорядоченное векторное пространство E, в котором для любых элементов $x, y \in E$ существуют $x \vee y := \sup\{x, y\}$ и $x \wedge y := \inf\{x, y\}$.

Пусть E — векторная решётка и $x \in E$. Для каждого элемента $x \in E$ существуют: $|x| := x \vee (-x)$, $\quad x^+ := x \vee 0$, $\quad x^- := (-x)^+ = -(x \wedge 0)$.

Примеры векторных решёток:

(a) $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел. Для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{R}^\Omega$ — множество всех функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \neq 0)$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями.

(c) $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma)$ — пространство всех Σ-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями.

(d) Пусть X — топологическое пространство. Множество $C(X)$ всех непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями.

(e) Пусть X — топологическое пространство. Множество $C_b(X)$ всех непрерывных ограниченных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями.

Порядковым идеалом в векторной решётке E называется векторное подпространство E_0 в E такое, что если $x \in E$ и $z \in E_0$ удовлетворяют неравенству $|x| \leqslant |z|$, то $x \in E_0$. Всякий порядковый идеал является векторной подрешёткой.

Примеры порядковых идеалов:

(a) $l_0 = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Пространство l_p абсолютно сходящихся последовательностей с p-ой степенью является порядковым идеалом в l_0 $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

(b) $E := \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu) \subset \mathbb{R}^{\Omega}$. Пространство $\mathcal{L}^p(\mu)$ интегрируемых с p-ой степенью функций является порядковым идеалом в E $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. В частности, пространство $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ измеримых ограниченных функций является порядковым идеалом в E.

Пусть E — векторная решётка и A — подмножество в E. Подмножество A называется *ограниченным сверху*, если существует такой элемент $x \in E$, что $x \geqslant y$ для всех $y \in A$. Подмножество A называется *ограниченным снизу*, если существует такой элемент $x \in E$, что $x \leqslant y$ для всех $y \in A$. Подмножество A *называется порядково ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Пусть A — ограниченное подмножество в векторной решётке E.

Супремумом множества A называется наименьший элемент множества всех его верхних границ. Обозначение: $\sup A$ или $\bigvee A$.

Инфимумом множества A называется наибольший элемент множества всех его нижних. Обозначение: $\inf A$ или $\bigwedge A$.

Векторная решетка E называется *порядково σ-полной (или K_σ-пространством*, если всякое счётное ограниченное сверху подмножество имеет супремум и всякое счётное ограниченное снизу подмножество имеет инфимум.

Векторная решетка E называется *порядково полной или K-пространством*, если всякое его порядково ограниченное подмножество имеет супремум и инфимум.

Примеры.

(a) Порядково полными векторными решётками являются множество действительных чисел $\mathbb{R}$; пространство $\mathbb{R}^\Omega$ всех функций из $f : \Omega \to \mathbb{R}$; пространства l_p для всех $0 \leqslant p \leqslant \infty$

(b) Всякая порядково полная векторная решётка является порядково σ-полной. Пространство $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ является порядково σ-полной векторной решёткой. Если множество Ω сигма-конечно, то $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ является порядково полной векторной решёткой.

(c) $C(X)$ не является порядково σ-полной векторной решёткой.

Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой, F — векторная подрешетка в $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$, E — произвольная векторная решетка.

Линейный оператор $T : F \to E$ называется *положительным*, если $Tx \geqslant 0$ для всех $0 \leqslant x \in F$.

Положительный оператор $T : F \to E$ называется *порядково σ-непрерывным*, если для всякой последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty \subset F$ и $x \in F$ таких, что $0 \leqslant x_n \uparrow x$, следует $0 \leqslant Tx_n \uparrow Tx$ (эквивалентно, соотношение $x_n \downarrow 0$ влечёт $Tx_n \downarrow 0$).

Напомним, что запись $0 \leqslant x_n \uparrow x$ означает, что $0 \leqslant x_n(\omega) \leqslant x_{n+1}(\omega)$ и $\sup_n x_n(\omega) = x(\omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$. Аналогично, $x_n \downarrow 0$ означает, что $x_n(\omega) \geqslant x_{n+1}(\omega)$ и $\inf_n x_n(\omega) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$.

Пример. Пусть $F := \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство измеримых интегрируемых функций, $T : f \mapsto \int f \, d\mu$ для всех $f \in F$. Тогда $T : F \to \mathbb{R}$ — линейный положительный порядково σ-непрерывный функционал.

Подробное изложение теории векторных решёток и операторов в них можно найти в монографиях [1, 2, 3].

Всюду далее Ω – некоторое непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств множества Ω, E — порядково σ-полная векторная решётка. Введем в E символ ∞ и будем полагать, что $x < \infty$ для всех $x \in E$.

Определение 3.1. Функция $\mu : \Sigma \to E \cup \{\infty\}$ называется *мерой*, если выполняются следующие условия:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) $\mu(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \Sigma$;

(3) для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$, удовлетворяющей условию $A_i \cap A_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, справедливо равенство

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{r=1}^{n} \mu(A_r).$$

Мера μ обладает следующими свойствами:

(i) Если $A \subset B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ (монотонность);

(ii) Если $A_n \subset A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\mu(\bigcup_n A_n) = \sup_n \mu(A_n)$;

(iii) Если $A_n \supset A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\mu(\bigcap_n A_n) = \inf_n \mu(A_n)$.

Свойства (ii) и (iii) называют непрерывностью меры μ.

Пару (Ω, Σ), где Σ — σ-алгебра подмножеств Ω, называют *измеримым пространством*, а элементы из Σ — *измеримыми множествами*.

Всюду далее (Ω, Σ, μ) — фиксированное измеримое пространство с мерой $\mu : \Sigma \to E \cup \{\infty\}$, $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борелевская σ-алгебра на вещественной прямой.

Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется Σ-*измеримой*, если если $f^{-1}(B) \in \Sigma$ для всякого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ (или, эквивалентно, $\{x \in \Omega : f(x) < c\} \in \Sigma$ для любого $c \in \mathbb{R}$).

Символом $\mathcal{L}^0(\mu) := \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ будем обозначать множество всех Σ-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Определение 3.2. Функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется Σ-*ступенчатой*, если она представима в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ попарно не пересекаются и $\mu(A_i) < \infty$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим символом $\mathrm{St}(\Sigma)$ множество всех Σ-ступенчатых функций. Положим по определению

$$I_\mu(\varphi) := \int \varphi \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \tag{1}$$

для всех $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathrm{St}(\Sigma)$.

Лемма 3.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Множество* $\mathrm{St}(\Sigma)$ *является векторной подрешеткой* $\mathcal{L}^0(\mu)$*;*

(2) *Отображение* $I_\mu : \mathrm{St}(\Sigma) \to E$ *из формулы* (1) *корректно определено (т.е.* $I_\mu(\varphi)$ *не зависит от представления* $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathrm{St}(\Sigma)$*) и является линейным оператором.*

$\lhd$ См. доказательство леммы 1.2 из лекции №1. $\rhd$

Определение 3.3. Говорят, что некоторое свойство P выполняется *μ-почти всюду* (μ-п.в.), если мера множества, на котором свойство P не выполняется, равна нулю.

Примеры:

1. $f = g$ μ-п.в. означает, что $\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0$;

2. $f \geqslant g$ μ-п.в. означает, что $\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) < g(\omega)\}) = 0$;

3. $f \to f$ μ-п.в. означает, что $\mu(\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \nrightarrow f(\omega)\}) = 0$;

4. $f_n \uparrow f$ μ-п.в. означает, что $f_n \leqslant f_{n+1}$ μ-п.в. для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \to f$ μ-п.в. (следовательно, $f = \sup_n f_n$ μ-п.в.)

5. $f_n \downarrow f$ μ-п.в. означает, что $f_n \geqslant f_{n+1}$ μ-п.в. для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \to f$ μ-п.в. (следовательно, $f = \inf_n f_n$ μ-п.в.)

6. $0 \leqslant f_n \uparrow f$ μ-п.в. означает, что $f_n \geqslant 0$ μ-п.в., $f_n \leqslant f_{n+1}$ μ-п.в. для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \to f$ μ-п.в. (следовательно, $f = \sup_n f_n$ μ-п.в.)

Всюду далее запись $e_n \uparrow e$ в E будет означать $e_n \leqslant e_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\sup_n e_n = e$ для последовательности $(e_n)_{n=1}^\infty \subset E$ и $e \in E$.

Аналогично, запись $e_n \downarrow e$ в E будет означать $e_n \geqslant e_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\inf_n e_n = e$.

Лемма 3.2. (Непрерывность I_μ) *Пусть последовательность Σ-ступенчатых функций $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{St}(\Sigma)$ такая, что $\varphi_n \downarrow 0$ μ-п.в. Тогда $I_\mu(\varphi_n) \downarrow 0$. В частности, если $\varphi_n \uparrow \varphi$ μ-п.в., $\varphi \in \mathrm{St}(\Sigma)$, то $I_\mu(\varphi_n) \uparrow I_\mu(\varphi)$.*

$\lhd$ Доказательство следует из леммы 1.4 (лекция №1). Докажем лемму.

Предположим сначала, что условия леммы выполнены всюду на Ω, т. е. $\varphi_n(\omega) \geqslant \varphi_{n+1}(\omega)$ и $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\omega) = \varphi(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим по определению $M := \max\{\varphi_1(\omega) : \omega \in \Omega\}$, $B := \{\omega \in \Omega : \varphi_1(\omega) > 0\}$ и $E_n := \{\omega \in \Omega : \varphi_n(\omega) \geqslant \varepsilon\}$. Тогда $E_n \downarrow \emptyset$ и в силу непрерывности μ выполняется $\mu(E_n) \downarrow 0$. Так как $E_n \subset B$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то справедливы соотношения

$$0 \leqslant \varphi_n = \varphi_n \chi_B = \varphi_n \chi_{E_n} + \varphi_n \chi_{B \setminus E_n} \leqslant M\chi_{E_n} + \varepsilon \chi_B$$

Тогда в силу Леммы 3.1 выполняются неравенства

$$0 \leqslant I_\mu(\varphi_n) \leqslant I_\mu(M\chi_{E_n} + \varepsilon\chi_B) = M\mu(E_n) + \varepsilon\mu(B)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. В виду непрерывности μ получим $\inf_{n\in\mathbb{N}} I_\mu(\varphi_n) \leqslant \varepsilon\mu(B)$ для любого $\varepsilon > 0$. В силу произвольности ε выводим $\inf_{n\in\mathbb{N}} I_\mu(\varphi_n) = 0$.

Пусть теперь $\varphi_n \downarrow 0$ μ-п.в. Обозначим через $E := \{\omega \in \Omega : \varphi_n(\omega) \downarrow 0\}$. Тогда $\chi_E\varphi_n \downarrow 0$ и в силу рассуждений выше $I_\mu(\chi_E\varphi_n) \downarrow 0$. Но так как $\chi_E\varphi_n = \varphi_n$ μ-п.в., то по лемме 1.3(2) $I_\mu(\chi_E\varphi_n) = I_\mu(\varphi_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $I_\mu(\varphi_n) \downarrow 0$.

Предположим, что $\varphi_n \uparrow \varphi$ μ-п.в. Тогда $\varphi - \varphi_n \downarrow 0$ μ-п.в. и в силу доказанного выше $I_\mu(\varphi) - I_\mu(\varphi_n) = I_\mu(\varphi - \varphi_n) \downarrow 0$. Таким образом, $I_\mu(\varphi_n) \uparrow I_\mu(\varphi)$. $\rhd$

Теорема 3.1. *Пусть функция $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$ и две последовательности Σ-ступенчатых функций $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ и $(\psi_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{St}(\Sigma)$ такие, что $\varphi_n \uparrow f$ μ-п.в. и $\psi_n \uparrow f$ μ-п.в. Тогда $\lim_n I_\mu(\varphi_n) = \lim_n I_\mu(\psi_n)$.*

$\lhd$ Достаточно воспроизвести доказательство теоремы 1.1, используя лемму 3.2 вместо леммы 1.4 из лекции №1. $\rhd$

Определение 3.4. Функция $0 \leqslant f \in \mathcal{L}^0(\mu)$ μ-п.в. называется *интегрируемой*, если существует последовательность Σ-ступенчатых функций $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ такая, что $0 \leqslant \varphi_n \uparrow_n f$ μ-п.в. и $\lim_n \int \varphi_n \, d\mu = \sup_n \int \varphi_n \, d\mu <$

∞. При этом будем полагать $I_\mu(f) := \int f\, d\mu := \lim_n \int \varphi_n\, d\mu = \sup_n \int \varphi_n\, d\mu$. Таким образом,

$$0 \leqslant \int f\, d\mu := \lim_n \int \varphi_n\, d\mu = \sup_n \int \varphi_n\, d\mu.$$

Замечание 3.1. Из теоремы 3.1 следует, что $I_\mu(f)$ не зависит от выбора $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \mathrm{St}(\Sigma)$. Следовательно, если функция $f \geqslant 0$ μ-п.в. интегрируема и для некоторой функции $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ выполняется $g = f$ μ-п.в., то g интегрируема и $\int g\, d\mu = \int f\, d\mu \geqslant 0$. Действительно, если $0 \leqslant \varphi_n \uparrow f$ μ-п.в. и $f = g$ μ-п.в., то $0 \leqslant \varphi_n \uparrow g$ μ-п.в. и $\int g\, d\mu = \lim_n \int \varphi_n\, d\mu = \int f\, d\mu$. В частности, если $f = 0$ μ-п.в., то $\int f\, d\mu = 0$.

Определение 3.4. Произвольная функция $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$ называется *интегрируемой*, если интегрируемы функции $f^+ := f \vee 0$ и $f^- := f \wedge 0$. При этом будем полагать

$$I_\mu(f) := \int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu. \tag{2}$$

Символом $\mathcal{L}^1(\mu)$ будем обозначать множество всех интегрируемых функций. Таким образом, мы получили оператор $I_\mu : f \mapsto \int f\, d\mu$ из $\mathcal{L}^1(\mu)$ в E.

Теорема 3.2. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если функции $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ такие, что $|g| \leqslant |f|$ μ-п.в., то $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$;*

(2) *Множество $\mathcal{L}^1(\mu)$ является порядковым идеалом в $\mathcal{L}^0(\mu)$;*

(3) *Отображение $I_\mu : f \mapsto \int f\, d\mu$ из $\mathcal{L}^1(\mu)$ в E является линейным положительным оператором.*

(4) *Если $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ такие, что $f = g$ μ-п.в., то $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $I_\mu(f) = I_\mu(g)$;*

(5) *Если $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $f \geqslant g$ μ-п.в., то $I_\mu(f) \geqslant I_\mu(g)$ (монотонность I_μ);*

(6) *Для функции $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ выполняется $I_\mu(|g|) = 0$, тогда и только тогда $g = 0$ μ-п.в.*

$\lhd$ См. доказательство теоремы 1.4 из лекции №1. $\rhd$

Теорема 3.3. **(σ-непрерывность I_μ)** *Пусть последовательность интегрируемых функций $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ удовлетворяет условию $f_n \downarrow_n 0$ μ-п.в. Тогда $\lim_n \int f_n\, d\mu = 0$ (следовательно, $\int f_n\, d\mu \downarrow_n 0$).*

$\lhd$ См. доказательство теоремы 1.5 из лекции №1. $\rhd$

Теорема 3.4. **(Неравенство Чебышева)** *Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \geqslant 0$ μ-п.в. и $0 < \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int f\, d\mu.$$

$\lhd$ См. доказательство теоремы 1.6 из лекции №1. $\rhd$

Теорема 3.5. **(Леви)** *Пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ удовлетворяет условиям $f_n \leqslant f_{n+1}$ μ-п.в. для всех $n \in \mathbb{N}$, $\lim_n \int f_n\, d\mu < \infty$. Тогда существует функция $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ такая, что $f_n \uparrow_n f$ μ-п.в. и $\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu$ (следовательно, $\int f_n\, d\mu \uparrow_n \int f\, d\mu$).*

$\lhd$ См. доказательство теоремы 1.7 из лекции №1. $\rhd$

Теорема 3.6. **(Лемма Фату)** *Пусть последовательность интегрируемых функций $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ такая, что $f_n \geqslant 0$ μ-п.в. для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\liminf \int f_n\, d\mu < \infty$ ($\equiv \sup_m \inf_{n \geqslant m} \int f_n\, d\mu < \infty$). Тогда функция $\liminf f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $\int \liminf f_n\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu$.*

$\lhd$ См. доказательство теоремы 1.8 из лекции №1. $\rhd$

Теорема 3.7. **(Лебега о мажорированной сходимости)** *Пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ удовлетворяет условиям $|f_n| \leqslant g$ μ-п.в. и $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $f_n \to f$ μ-п.в., то $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и выполняются равенства $\lim_n \int f_n\, d\mu = \int \lim_n f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$.*

$\lhd$ См. доказательство теоремы 1.9 из лекции №1. $\rhd$

Замечание 3.2. Введём в пространстве $\mathcal{L}^0(\mu)$ отношение эквивалентности: $f \sim g$ по определению означает $f = g$ μ-п.в. Пространство классов эквивалентных функций обозначают символом $L^0(\mu) := \mathcal{L}^0 / \sim$. В пространстве $L^0(\mu)$ вводят алгебраические и решеточное операции следующим образом: $\widetilde{f} + \widetilde{g} := \widetilde{f+g}$, $\lambda \widetilde{f} := \widetilde{\lambda f}$, $\widetilde{f} \vee \widetilde{g} := \widetilde{f \vee g}$, $\widetilde{f} \wedge \widetilde{g} := \widetilde{f \wedge g}$ для всех классов эквивалентности $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in L^0(\mu)$ и чисел $\lambda \in \mathbb{R}$. Относительно введённых операций $L^0(\mu)$ является векторной решёткой, а пространство классов эквивалентности интегрируемых функций $L^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu)/\sim$ является идеалом в $L^0(\mu)$ и, следовательно, векторной подрешеткой. Так как интегралы от эквивалентных функций совпадают, то можно определить интеграл на $L^1(\mu)$ следующим образом: $\int \widetilde{f}\ d\mu := \int f\ d\mu$ для всех $\widetilde{f} \in L^1(\mu)$. При этом $\int |\widetilde{f}|\ d\mu = 0$ тогда и только тогда, когда $|\widetilde{f}| = 0$.

Замечание 3.3. Ввиду того, что интеграл не зависит от значений, принимаемых функцией на множестве нулевой меры, можно рассматривать функции, принимающие значения $+\infty$ и $-\infty$ на множествах меры нуль. При этом свойства интеграла на $L^1(\mu)$ сохраняться, а состав элементов $L^1(\mu)$ не изменится.

Литература

1. *Aliprantis C. D., and Burkinshaw O.* Positive Operators, Springer, 1985, 376 p.
2. *Kusraev A. G.* Dominated Operators, Springer, 2000, 446 p.
3. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices, Berlin etc.: Springer, 1991, 395 p.
4. *Wright M.* Stone-Algebra-Valued Measures and Integrals // Proc. London Math. Soc.—1969—V.19, №3, pp. 107–122.

Порядковое интегрирование и теорема типа Рисса-Маркова
о представлении положительных операторов

Курс лекций

Тасоев Б.Б.
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН.

Владикавказ 2023

Лекция №4. Теорема типа Рисса–Маркова
о представлении положительных операторов.

Теоремы типа Рисса–Маркова о представлении положительных операторов получены в работах [7, 8, 9]. В данной лекции предлагается альтернативное и более простое доказательства этих теорем, пользуясь результатом из теории векторных решёток о продолжении положительного оператора на сигма-пополнение своего области определения (см. [4]).

Упорядоченным векторным пространством над полем $\mathbb{R}$ называют пару $E := (E, \leqslant)$, где E — векторное пространство, $\leqslant$ — отношение порядка, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) если $x \geqslant y$, то $x + z \geqslant y + z$ для всех $x, y, z \in E$;

(2) если $x \geqslant y$, то $\alpha x \geqslant \alpha y$ для всех $0 \leqslant \alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$.

Векторной решёткой называют упорядоченное векторное пространство E, в котором для любых элементов $x, y \in E$ существуют $x \vee y := \sup\{x, y\}$ и $x \wedge y := \inf\{x, y\}$.

Пусть E — векторная решётка и $x \in E$. Тогда в E существуют следующие элементы: $|x| := x \vee (-x)$, $\quad x^+ := x \vee 0$, $\quad x^- := (-x)^+ = -(x \wedge 0)$.

Примеры векторных решеток:

(a) $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел. Для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{R}^\Omega$ — множество всех функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \neq 0)$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями.

(c) $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma)$ — множество всех Σ-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями.

(d) Пусть X — топологическое пространство. Множество $C(X)$ всех непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями.

(e) Пусть X — топологическое пространство. Множество $C_b(X)$ всех непрерывных ограниченных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями.

(f) Пусть X — топологическое пространство. Множество $Bor(X)$ всех ограниченных борелевских функций $f : X \to \mathbb{R}$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями. Напомним, что функция f называется борелевской, если она измерима относительно σ-алгебры, порождённой всеми открытыми множествами из X.

Пусть E — векторная решётка и A — подмножество в E. Подмножество A называется *ограниченным сверху*, если существует такой элемент $x \in E$, что $x \geqslant y$ для всех $y \in A$. Аналогично, подмножество A называется *ограниченным снизу*, если существует такой элемент $x \in E$, что $x \leqslant y$ для всех $y \in A$.

Векторная решетка E называется *порядково полной или K-пространством*, если всякое ограниченное сверху подмножество имеет супремум и всякое ограниченное снизу подмножество имеет инфимум.

Векторная решетка E называется *порядково σ-полной (или K_σ-пространством*, если всякое счётное ограниченное сверху подмножество имеет супремум и всякое счётное ограниченное снизу подмножество имеет инфимум.

Примеры порядково полных и σ-полных векторных решеток.

(a) Порядково полными векторными решётками являются множество действительных чисел $\mathbb{R}$; пространство $\mathbb{R}^\Omega$ всех функций из $f : \Omega \to \mathbb{R}$; пространства l_p для всех $0 \leqslant p \leqslant \infty$

(b) Всякая порядково полная векторная решётка является порядково σ-полной. Пространство $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ является порядково σ-полной векторной решёткой. Если множество Ω сигма-конечно, то $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ является порядково полной векторной решёткой.

(c) $C(X)$ не является порядково σ-полной векторной решёткой.

Пусть E — векторная решётка, $(x_n)_{n=1}^\infty \subset E$. Запись $x_n \downarrow 0$ будет означать, что $x_n \geqslant x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\inf_n x_n = 0$. Аналогично, если $x \in E$, то $x_n \uparrow x$ означает, что $0 \leqslant x_n \leqslant x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\sup_n x_n = x$.

Пример. Пусть $E := \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma)$, $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma)$. Тогда $x_n \downarrow 0$ означает, что $x_n(\omega) \geqslant x_{n+1}(\omega)$ и $\inf_n x_n(\omega) = x(\omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$.

Линейный оператор $T : E \to F$, действующий между векторными решётками E и F, называется *положительным*, если $Tx \geqslant 0$ для всех

$0 \leqslant x \in E$.

Положительный оператор $T : E \to F$ называется *порядково σ-непрерывным*, если для всякой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ и $x \in E$ таких, что $0 \leqslant x_n \uparrow x$, выполняется $0 \leqslant Tx_n \uparrow x$ (или, эквивалентно, соотношение $x_n \downarrow 0$ влечёт $Tx_n \downarrow 0$).

Подробное изложение теории векторных решёток и операторов в них можно найти в монографиях [1, 2, 3].

Всюду далее X — компактное хаусдорфово топологическое пространство ($\equiv$ компакт), E — порядково σ-полная векторная решётка, Σ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества X, $C(X)$ — векторная решетка непрерывных функций из X в $\mathbb{R}$.

Определение 4.1. *Борелевской σ-алгеброй* на множестве X называется наименьшая σ-алгебра Σ_{Bor}, содержащая все замкнутые множества в X. Элементы из Σ_{Bor} будем называют *борелевскими множествами.*

Определение 4.2. *Бэровской σ-алгеброй* на множестве X называется наименьшая σ-алгебра Σ_{Ba}, относительно которой все функции из $C(X)$ являются измеримыми. Элементы из Σ_{Ba} будем называют *бэровскими множествами.*

Известно, что бэровская σ-алгебра Σ_{Ba} совпадает с наименьшей σ-алгеброй, содержащей все замкнутые G_δ-множества [6, Предложение 21]. Напомним, что подмножество $A \subset X$ называется *G_δ-множеством*, если найдется последовательность $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ открытых множеств такая, что $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

Ясно, что $\Sigma_{Ba} \subset \Sigma_{Bor}$. В топологических пространствах со счетной базой справедливо равенство $\Sigma_{Ba} = \Sigma_{Bor}$. В частности, в компактных метрических пространствах, а также в $\mathbb{R}^n$ верно $\Sigma_{Ba} = \Sigma_{Bor}$ ([6, Теорема 20], [5, §50, Теорема E]).

Определение 4.3. Функция $\mu : \Sigma \to E \cup \{\infty\}$ называется *мерой*, если выполняются следующие условия:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) $\mu(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \Sigma$;

(3) для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$, удовлетворяющей условию $A_i \cap A_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, справедливо равенство

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{r=1}^{n} \mu(A_r).$$

Мера μ обладает следующими свойствами:

(i) Если $A \subset B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ (монотонность);

(ii) Если $A_n \subset A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\mu(\bigcup_n A_n) = \sup_n \mu(A_n)$;

(iii) Если $A_n \supset A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\mu(\bigcap_n A_n) = \inf_n \mu(A_n)$.

Свойства (ii) и (iii) называют непрерывностью меры μ.

Определение 4.4. Пусть Σ_{Ba} — бэровская σ-алгебра подмножеств компакта X, E — порядково полная векторная решетка. Бэровская мера $\mu : \Sigma_{Ba} \to E$ называется *квазирегулярной*, если выполняется условие

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \in \Sigma_{Ba},\ K \text{ замкнуто в } X,\ K \subset G\}$$

для всех открытых множеств $G \in \Sigma_{Ba}$.

Определение 4.5. Пусть Σ_{Bor} — борелевская σ-алгебра подмножеств компакта X, E — порядково полная векторная решетка. Борелевская мера $\mu : \Sigma_{Bor} \to E$ называется *квазирегулярной*, если выполняется условие

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \in \Sigma_{Bor},\ K \text{ замкнуто в } X,\ K \subset G\}$$

для всех открытых множеств $G \in \Sigma_{Bor}$.

Лемма 4.1. *Пусть X — компакт, E — порядково полная векторная решетка, Σ_{Ba} — бэровская σ-алгебра подмножеств X, $\mu : \Sigma_{Ba} \to E$ — бэровская мера. Тогда μ квазирегулярна.*

$\lhd$ Пусть $\mu : \Sigma_{Ba} \to E$ — бэровская мера. Условие квазирегулярности эквивалентно следующему:

$$\mu(F) = \inf\{\mu(G) : G \in \Sigma_{Ba},\ G \text{ открыто в } X,\ F \subset G\}$$

для всех замкнутых множеств $F \in \Sigma_{Ba}$. В силу [5, §51,Теорема D] каждое замкнутое множество $F \in \Sigma$ является G_δ-множеством. То есть существует последовательность открытых множеств $(G_n)_{n=1}^\infty$ такая, что

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Положим по определению $V_k := \bigcap_{n=1}^k G_n$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $V_k \supset V_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и выполняется равенство $F = \bigcap_{k=1}^\infty V_k$. Следовательно, в виду непрерывности μ получим $\mu(F) = \inf_k \mu(V_k)$. Тогда в силу монотонности μ и свойств точных нижних границ справедливы неравенства

$$\mu(F) \leqslant \inf\{\mu(G) : G \in \Sigma_{Ba},\ G \text{ открыто в } X,\ F \subset G\} \leqslant$$
$$\inf\{\mu(V_k) :\ k \in \mathbb{N}\} = \mu(F).$$

Таким образом $\mu(F) = \inf\{\mu(G) : G \in \Sigma_{Ba},\ G \text{ открыто в } X,\ F \subset G\}$ для каждого замкнутого $F \in \Sigma_{Ba}$. $\triangleright$

Определение 4.6. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется бэровской, если $f^{-1}(B) \in \Sigma_{Ba}$ для всякого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ (или эквивалентно $\{x \in X : f(x) < c\} \in \Sigma_{Ba}$ для любого $c \in \mathbb{R}$).

Символом $B(X)$ будем обозначать множество всех ограниченных бэровских функций на X. Ясно, что $C(X) \subset B(X)$.

Теорема 4.1. [4, Теорема 2.1] *Пусть X — компакт, $B(X)$ — σ-полная векторная решётка ограниченных бэровских функций на X, E — σ-полная векторная решётка, $\phi : C(X) \to E$ — линейный положительный оператор. Тогда существует единственный линейный положительный порядково σ-непрерывный оператор $\widetilde{\phi} : B(X) \to E$ такой, что $\widetilde{\phi}(f) = \phi(f)$ для всех $f \in C(X)$.*

Теорема 4.2. [9, Теорема 4.6] *Пусть X — компакт, E — порядково σ-полная векторная решётка и $T : C(X) \to E$ — линейный положительный оператор. Тогда существует единственная бэровская мера $\mu : \Sigma_{Ba} \to E$ такая, что для всех $f \in C(X)$ справедливо представление*

$$T(f) = \int f\ d\mu. \tag{1}$$

$\lhd$ По теореме 4.1 существует линейный положительный порядково σ-непрерывный оператор $\widetilde{T} : B(X) \to E$ такой, что $\widetilde{T}(f) = T(f)$ для всех $f \in C(X)$. Положим по определению

$$\mu(A) := \widetilde{T}(\chi_A)$$

для всех $A \in \Sigma_{Ba}$. Покажем, что функция $\mu : \Sigma_{Ba} \to E$ является мерой.

Действительно, $\mu(\emptyset) = \widetilde{T}(\chi_{\emptyset}) = \widetilde{T}(0) = 0$. Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma_{Ba}$ такая, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Обозначим через $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и отметим, что $0 \leqslant \sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n} = \chi_{\bigcup_{n=1}^{k} A_n} \uparrow_k \chi_A$. Следовательно, в силу линейности, положительности и порядково σ-непрерывности $\widetilde{T}$ выполняются равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} \widetilde{T}(\chi_{A_n}) =$$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \widetilde{T}\Big(\sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n}\Big) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \widetilde{T}(\chi_{\bigcup_{n=1}^{k} A_n}) = \widetilde{T}(\chi_A) = \mu(A).$$

Таким образом, μ — мера. Отметим, что $\int \chi_X \, d\mu = \mu(X) = \widetilde{T}(\chi_X)$.

Установим справедливость представления

$$\widetilde{T}(g) = \int g \, d\mu$$

В виду равенства $g = g^+ - g^-$, достаточно ограничиться положительными функциями $g \in B(X)$. Пусть $0 \leqslant g \in B(X)$. Существует константа $C > 0$ такая, что $g \leqslant C\chi_X$. Так как функция $C\chi_X \in B(X)$ интегрируема, то по теореме 3.2 (лекция №3) g также интегрируема. Следовательно, по определению 3.4 (лекция №3) существует последовательность Σ_{Ba}-ступенчатых функций $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $0 \leqslant \varphi_n \uparrow_n g$ μ-п.в. и $\int g \, d\mu = \sup_n \int \varphi_n \, d\mu$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant \varphi_n \uparrow_n g$. Каждая функция φ_n имеет вид $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i \chi_{A_i}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \Sigma_{Ba}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Для всех $n \in \mathbb{N}$

выполняются равенства

$$\int \varphi_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i \widetilde{T}(\chi_{A_i}) = \widetilde{T}\Big(\sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i \chi_{A_i} \Big) = \widetilde{T}(\varphi_n).$$

Следовательно, в виду порядково σ-непрерывности $\widetilde{T}$ справедливы равенства

$$\int g \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{T}(\varphi_n) = \widetilde{T}(g).$$

Таким образом, $\widetilde{T}(g) = \int g \, d\mu$ для всех $0 \leqslant g \in B(X)$ и, тем самым, справедливо представление (1).

Покажем единственность меры μ. Предположим, что существует мера $\lambda : \Sigma_{Ba} \to E$ такая, что $T(f) = \int f \, d\lambda$ для всех $f \in C(X)$. Так как существует $\int \chi_X \, d\lambda = \lambda(X)$, то в виду теоремы 3.2 (лекция №3) все функции из $B(X)$ интегрируемы по мере λ. Положим по определению

$$I_\lambda(g) := \int g \, d\lambda$$

для всех $g \in B(X)$. Тогда в силу теорем 3.2 и 3.3 (лекция №3) оператор $I_\lambda : f \mapsto \int f \, d\mu$ из $B(X)$ в E линеен, положителен и порядково σ-непрерывен. Кроме того, $I_\lambda(f) = T(f)$ для всех $f \in C(X)$. Тогда в силу единственности $\widetilde{T}$ справедливо равенство $\widetilde{T}(g) = I_\lambda(g)$ для всех $g \in B(X)$. Следовательно, $\lambda(A) = \int \chi_A \, d\lambda = I_\lambda(\chi_A) = \widetilde{T}(\chi_A) = \mu(A)$ для всех $A \in \Sigma_{Ba}$. Таким образом, $\mu = \lambda$. $\triangleright$

Следствие 4.1. *Пусть X — компакт, E — порядково полная векторная решётка и $T : C(X) \to E$ — линейный положительный оператор. Тогда существует единственная квазирегулярная бэровская мера $\mu : \Sigma_{Ba} \to E$ такая, что для всех $f \in C(X)$ справедливо представление*

$$T(f) = \int f \, d\mu.$$

$\triangleleft$ Доказательство следует из теоремы 4.2 и леммы 4.1. $\triangleright$

Теорема 4.3 [7, Теорема 4.5]. *Пусть X — компакт, E — порядково полная векторная решётка и $T : C(X) \to E$ — линейный положительный оператор. Тогда существует единственная борелевская квазирегулярная мера $\mu : \Sigma_{Bor} \to E$ такая, что для всех $f \in C(X)$ справедливо представление*

$$T(f) = \int f \ d\mu.$$

Литература

1. *Aliprantis C. D., and Burkinshaw O.* Positive Operators, Springer, 1985, 376 p.
2. *A. G. Kusraev,* Dominated Operators, Springer, 2000, 446 p.
3. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices, Berlin etc.: Springer, 1991, 395 p.
4. *Coquand, T.* A note on measures with values in a partially ordered vector space // Positivity—2004—V.8, pp. 395–400.
5. *Halmos, P.R.* Measure Theory, Springer New York, 1974, 304+XII p.
6. *Royden H.L., Fitzpatric P.M.* Real Analysis, Pearson; 4th edition, 2010, 505 p.
7. *Wright M.* Stone-Algebra-Valued Measures and Integrals // Proc. London Math. Soc.—1969—V.19, №3, pp. 107–122.
8. *Wright M.* Vector Lattice Measures on Locally Compact Spaces // Math.Z—1971—V.120, pp. 193–203.
9. *Wright M.* Measures with Values in a Partially Ordered Vector Space // Proc. London Math. Soc.—1972—V.25, №3, pp. 675–688.